MIM2 - Algorithmes d'approximation - TD 2

Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr - Bureau 317

Couvertures et compagnie
29 Septembre 2003

Exercice 1 (Acheminement de biscuits)

Considérons un graphe $G = (V, E)$ muni d'une fonction de coût positive sur les arêtes, et deux sous-ensembles disjoints de V : $\mathcal{E}$ les *entrepôts* de biscuits, et $\mathcal{D}$ les *destinataires*. Le problème est de trouver un sous-graphe de G, de coût minimal, tel que tout destinataire est relié par un chemin à l'un des entrepôts (n'importe lequel).
On partitionne les instances en 2 cas : $\mathcal{E} \cup \mathcal{D} = V$ et $\mathcal{E} \cup \mathcal{D} \neq V$.

1. Démontrez que le premier cas est dans **P**.
2. Démontrez que le second cas est **NP**-difficile et proposez une 2-approximation.

Exercice 2 (Instance critique)

Construisez une instance critique pour l'algorithme glouton de couverture par ensemble minimum vu en cours.

Exercice 3 (Algorithme glouton de couverture par ensemble minimum - suite)

Montrez que l'algorithme glouton du cours est en fait une H_M approximation, M étant le cardinal maximal d'un ensemble sélectionné dans l'optimal.
On pourra commencer par montrer que :

$$\forall S \in \mathcal{S}, \quad \sum_{u \in S} \mathrm{prix}(u) \leq H_{|S|}\, \mathrm{poids}(S)$$

Exercice 4 (Couverture maximum)

Étant donné un univers U contenant n éléments munis de poids positifs, une collection $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ de sous-ensembles de U, et un entier k, le problème est de sélectionner k ensembles de sorte à maximiser le poids total des éléments couverts.
On considère l'algorithme glouton évident qui sélectionne à chaque étape, le meilleur ensemble (i.e., le plus rentable), jusqu'à ce que k ensembles soient choisis.

1. Pour tout $1 \leq l \leq k$, montrez que :

$$\text{poids}(\bigcup_{i=1}^{l} S_i) - \text{poids}(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i) \geq \frac{\text{poids}(\text{OPT}) - \text{poids}(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)}{k}$$

2. Pour tout $1 \leq l \leq k$, montrez que :

$$\text{poids}(\bigcup_{i=1}^{l} S_i) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{l}\right) \text{poids}(\text{OPT})$$

   En déduire le facteur d'approximation de l'algorithme, dont on donnera une borne inférieure.

Exercice 5 (Coloriage de sommets)

Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, le problème est de colorier ses sommets avec un nombre minimal de couleurs, de sorte que les extrémités de chaque arête reçoivent des couleurs différentes.

1. Donnez un algorithme glouton qui colorie G avec $\Delta + 1$ couleurs, où Δ est le degré maximum d'un sommet de G.
2. Donnez un algorithme pour colorier avec $O(\sqrt{n})$ couleurs, un graphe coloriable avec 3 couleurs.
   Indication : On pourra séparer les sommets en deux ensembles : ceux de degré supérieur à une fonction $f(n)$ et ceux de degré inférieur. Remarque : pour tout sommet, le graphe induit par ses voisins est biparti.